

Cahier de vacances

Mathématiques approfondies – Vers la ECG 2

Lycée Thiers · Année 2026–2027

Contents

1	Calcul	2
2	Analyse	3
3	Algèbre linéaire	6
4	Probabilités élémentaires	8
5	Extraits de concours	9
6	Éléments de correction	12

Calcul

Méthode – Pivote de Gauss

Pour résoudre un système linéaire, on effectue des opérations élémentaires sur les lignes ($L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$) pour transformer la matrice augmentée en forme échelonnée, puis on remonte. Si une ligne devient $[0 \cdots 0 \mid c]$ avec $c \neq 0$: système **incompatible**.

Exercice 1 Classique

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - 3z - t = 0 \\ 2x + y - 5z + 4t = 4 \\ x - 2y + 3t = -2 \\ -x + y + z - 2t = -1 \end{cases}$$

Méthode – Sommations usuelles

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Pour montrer une égalité : **récurrence** (initialisation + hérédité) ou **calcul direct** par linéarité de la somme et formules usuelles.

Exercice 2 Classique

Montrer de deux manières (par récurrence, puis par les formules usuelles) que

$$\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}.$$

Exercice 3 Classique

Montrer que pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 4 Technique

Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ et tout $n \geq p + 1$,

$$\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}.$$

Exercice 5 Technique

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min\{i, j\} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}.$$

Analyse**Exercice 1**

Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 2 Subtil

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Indication : passer à la forme exponentielle et utiliser une limite usuelle.

Méthode – Suites monotones bornées

Pour montrer la convergence de (u_n) :

1. Montrer la **monotonie** (signe de $u_{n+1} - u_n$, souvent par récurrence).
2. Montrer qu'elle est **bornée** (par récurrence : $u_n \in [a, b]$).
3. Conclure par le **théorème de convergence monotone**.
4. Trouver ℓ en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 3 Classique

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$ est croissante, majorée par 1, et converge vers une limite à préciser.

Exercice 4 Costaud

Montrer que la fonction suivante est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Indication : utiliser le $DL_2(0)$ de la fonction exp.

Méthode – Inégalité des accroissements finis

Si f est dérivable sur $[a, b]$ avec $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Application classique : appliquer l'IAF à \ln sur $[n, n+1]$ avec $m = \frac{1}{n+1}$ et $M = \frac{1}{n}$.

Exercice 5 Classique

Montrer à l'aide de l'IAF que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Méthode – Séries télescopiques

Si $u_k = a_{k+1} - a_k$, alors $\sum_{k=1}^n u_k = a_{n+1} - a_1$.

Exercice 6 Classique

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Indication : faire apparaître une somme télescopique.

Exercice 7 Classique

Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive a_n . Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Exercice 8 Classique

Montrer que $f : x \mapsto xe^{x^2}$ réalise une bijection de \mathbf{R} sur un intervalle à préciser. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} en 0.

Exercice 9 Séries – critères de référence

Montrer la convergence et calculer la somme :

$$1. \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^2 (-2)^{n+2}}{5^n}$$

$$2. \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Méthode – Calcul d'intégrales

- **Primitivation** : reconnaître u'/u , $u'u^\alpha$, $u'e^u$, etc.
- **IPP** : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$. Choisir v facile à dériver, u' facile à primitiver.
- **Changement de variable** $u = \varphi(t)$: $du = \varphi'(t) dt$, adapter les bornes.

Exercice 10 Technique

Calculer :

1. $\int_1^{e^2} \frac{\ln t}{t} dt$ (primitivation)
2. $\int_0^1 te^{-2t} dt$ (IPP)
3. $\int_1^e t^2 \ln(t) dt$
4. $\int_1^2 \frac{dt}{3t-1}$, avec $u = 3t - 1$
5. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$, avec $u = 1 + e^x$

Exercice 11

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n dt = 0$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$.

Exercice 12 Costaud

Soit $x \in [0, 1[$ fixé.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
3. Que peut-on en déduire sur la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ et la valeur de sa somme ?

Algèbre linéaire

Méthode – Puissances de matrices – binôme de Newton

Si $A = \lambda I + N$ avec $N^p = 0$ et λI commutant avec N :

$$A^n = (\lambda I + N)^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k.$$

Exercice 1 Classique

Déterminer soigneusement A^n ($n \in \mathbf{N}^*$) pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode – Inversibilité d'une matrice

1. **Pivot de Gauss** sur $[A | I]$ pour obtenir $[I | A^{-1}]$.
2. **Relation polynomiale** : si $P(A) = 0$ avec $P(0) \neq 0$, isoler I_n pour exprimer A^{-1} .
3. **Noyau trivial** : $\ker(A) = \{0\} \Leftrightarrow A$ inversible.

Exercice 2

On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. À l'aide du pivot de Gauss, vérifier que A est inversible et calculer A^{-1} .
2. Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I .

Exercice 3 Technique

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Résoudre $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

Exercice 4

Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 5 Classique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ nilpotente : $\exists p \in \mathbf{N}^*$, $A^p = 0$.

1. Calculer $(I_n - A)(I_n + A + \dots + A^{p-1})$.
2. En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 6 Technique

Déterminer les réels λ pour lesquels $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible ssi $ad - bc \neq 0$.

Exercice 7 Costaud

Pour chacune des matrices M ci-dessous, déterminer les $\lambda \in \mathbf{R}$ pour lesquels $M - \lambda I$ n'est pas inversible, puis résoudre $(M - \lambda I)X = 0$.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

3. $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode – Famille libre – base de \mathbf{R}^n

Pour montrer qu'une famille est libre : poser $\sum \lambda_i v_i = 0$ et montrer $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ (par pivot de Gauss).

Une famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n est une **base**.

Exercice 8 Classique

Montrer que $((-1, 0, 0), (1, -1, 0), (-1, 1, -1))$ forme une base de \mathbf{R}^3 .

Exercice 9

Sans aucun calcul, déterminer le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Probabilités élémentaires

Exercice 1 Inégalité de Boole

1. Montrer que si C et D sont deux événements, $P(C \cup D) \leq P(C) + P(D)$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\sum_{i=1}^n P(A_i) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$.

Exercice 2 Classique

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et A_1, \dots, A_n des événements d'un espace probabilisé. Montrer par récurrence que

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - (n-1).$$

Exercice 3 Classique

Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.

Exercice 4 Technique

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer, à l'aide de la formule du binôme, que $\mathbf{E}(X) = np$.

Exercice 5 Technique

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p . La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?

Hint : Pour calculer $P(X \in A)$ avec A infini, écrire $A = \bigcup_{k \geq 0} \{X = a_k\}$ (événements incompatibles) et appliquer la σ -additivité, puis reconnaître une série géométrique de raison r ($|r| < 1$, somme = $\frac{1}{1-r}$).

Exercice 6 Costaud

Soit X une v.a. finie avec $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j).$$

Exercice 7 Technique

On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer que $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; N \rrbracket)$.

Exercice 8 Technique

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$.

Méthode – Formule des probabilités totales – loi de Y

Si la loi de Y sachant $(X = n)$ est connue, utiliser la FPT avec le SCE $((X = n))_{n \in \mathbf{N}}$:

$$P(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) \cdot P_{[X=n]}(Y = k).$$

Exercice 9 Costaud

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que, sachant $(X = n)$, $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $Y \sim \mathcal{P}(p\lambda)$.
Indication : utiliser la FPT avec le SCE $((X = n))_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 10 Costaud

Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. Montrer que

$$\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(1 - (1 - p)^2).$$

Hint : Si X et Y sont indépendantes, on calcule $P(Z \geq k)$ avec $Z = \min(X, Y)$:

$$P(Z \geq k) = P(X \geq k)P(Y \geq k),$$

puis $P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k + 1)$ pour en déduire la loi.

Extraits de concours**Exercice 1** Classique

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit $f_n(x) = n - xe^x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer par l'absurde que (u_n) n'est pas convergente. Quelle est sa limite ?
4. Déterminer u_0 .

Exercice 2 Technique

On considère $f(x) = x - 2 + e^{-x}$.

1. Étudier les limites de f en $\pm\infty$. Montrer que \mathcal{C}_f admet $y = x - 2$ comme asymptote

en $+\infty$.

2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β avec $\beta < 0 < \alpha$. Montrer que $\alpha \in]1, 2[$.
4. Tracer l'allure de \mathcal{C}_f ($\alpha \approx 1,84$, $\beta \approx -1,14$).
5. On pose $g(x) = 2 - e^{-x}$ et $u_0 = 1$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - (a) Montrer que $g(x) = x$ ssi $f(x) = 0$.
 - (b) Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n .
 - (c) Montrer que $|g'(x)| \leq 1/e$ sur $[1, 2]$.
 - (d) En déduire que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$.
 - (e) Montrer par récurrence que $|u_n - \alpha| \leq e^{-n}$. En déduire $\lim u_n$.

Exercice 3 Technique

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx$ et $J_n = \int_0^1 x e^{-x^2}(1-x)^n dx$.

1. (a) Dresser le tableau de variation de $x \mapsto x e^{-x^2}$ sur $[0, 1]$.
 - (b) En déduire : $0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}$.
 - (c) Étudier la convergence de (J_n) .
2. (a) Par une IPP, établir : $I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}$.
 - (b) En déduire les limites de I_n et de nI_n .

Exercice 4 Costaud

Une mouche se balade dans un appartement (salon + chambre, fenêtre du salon ouverte). À chaque seconde :

- Salon : reste (proba 1/2), sort (proba 1/4), va chambre (proba 1/4).
- Chambre : reste (proba 3/4), retourne salon (proba 1/4).
- Une fois sortie, elle ne revient plus.

X_n vaut 0 (dehors), 1 (salon) ou 2 (chambre). $X_0 = 1$. On note $U_n = (P(X_n=0), P(X_n=1), P(X_n=2))^T$.

1. Représenter par un graphe pondéré les transitions.
2. Écrire la matrice de transition A et établir la relation $U_{n+1} = AU_n$.
3. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la mouche quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 5 Costaud

On dispose d'un jeu de $2n$ cartes contenant deux rois rouges. Soit $a > 0$ un entier.

Partie 1. Les cartes sont alignées aléatoirement. Le joueur les découvre de gauche à droite jusqu'au premier roi rouge. $X =$ rang du premier roi rouge.

1. Que vaut $X(\Omega)$?
2. Montrer que $P(X = k) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
3. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \frac{2n + 1}{3}$.
4. $G_1 = a - X$ est le gain. Calculer $\mathbf{E}(G_1)$ en fonction de a et n .

Partie 2. Le joueur peut découvrir au maximum n cartes. $G_2 =$ gain algébrique.

5. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.
6. Vérifier que $P(G_2 = -n) = \frac{n - 1}{2(2n - 1)}$.
7. Obtenir $\mathbf{E}(G_2) = \frac{3(3n - 1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n - 1)}$.
8. Avec $n = 16$, déterminer selon a le protocole le plus favorable.

Éléments de correction

Section 1 – Calcul

Correction 1 Système linéaire

Après deux étapes de pivot de Gauss, on obtient une ligne de la forme $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ c]$ avec $c \neq 0$: le système est **incompatible, il n'a pas de solution**.

Correction 2 Somme $\sum k(2k^2 - 1)$

Par les formules usuelles. Par linéarité :

$$\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = 2 \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}. \quad \square$$

Correction 3 Coefficient binomial $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

On développe avec les factorielles :

$$k \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}. \quad \square$$

Correction 4 Somme de binomiaux – récurrence forte

On démontre $\mathcal{H}(p)$: $\forall n \geq p+1, \sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$.

Init. $n = p+1$: $\binom{p-1}{p-1} = 1 = \binom{p}{p}$. ✓

Hér. Supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie au rang $n-1$: $\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}$ (Pascal).
□

Correction 5 Sommes doubles

Première somme : on sépare selon $i \leq j$ et $i > j$, puis on utilise $\min\{i, j\} = j$ si $i \geq j$:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min\{i, j\} = 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i - \sum_{j=1}^n j = 2 \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Deuxième somme : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{4}.$

Section 2 – Analyse

Correction 1 $\ln(1+x) \leq x$

Méthode 1 (étude de fonction). On pose $h(x) = x - \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$. $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$: signe de x . Donc h est minimale en 0 avec $h(0) = 0$, d'où $h(x) \geq 0$ et $\ln(1+x) \leq x$. \square

Méthode 2 (convexité de e^x). \exp est convexe ($e^{x''} > 0$), donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0 : $e^x \geq 1+x$ pour tout x . En posant $x = \ln(1+u)$ pour $u > -1$, on obtient $1+u \geq 1+\ln(1+u)$, soit $\ln(1+u) \leq u$. \square

Correction 2 $\lim(1+1/n)^n = e$

$(1 + \frac{1}{n})^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n}))$. Or $n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{\ln(1+u)}{u} \Big|_{u=1/n} \rightarrow 1$ par la limite usuelle. Donc $(1 + 1/n)^n \rightarrow e^1 = e$. \square

Correction 3 Suite $u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/2$

Par récurrence, montrons $\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Init. $u_0 = 0, u_1 = 1/2 : 0 \leq 0 \leq 1/2 \leq 1$. \checkmark

Hér. Si $0 \leq u_n \leq 1 : u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0$. \checkmark

(u_n) est croissante et majorée par 1 : par le TCM elle converge vers $\ell \in [0, 1]$. Passage à la limite : $\ell = \frac{\ell^2+1}{2}$, soit $(\ell-1)^2 = 0$, donc $\ell = 1$. \square

Correction 4 Classe \mathcal{C}^1 de f

Continuité en 0. Limite usuelle : $\frac{e^x-1}{x} \rightarrow 1 = f(0)$. \checkmark

Dérivabilité en 0. Taux d'accroissement : $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$. En utilisant $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, ce rapport vaut $\frac{1}{2} + \varepsilon(x) \rightarrow \frac{1}{2}$. Donc $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Expression de f' pour $x \neq 0$. Par quotient : $f'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.

Continuité de f' en 0. Avec le même DL : $f'(x) = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} = f'(0)$. Donc $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R})$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. \square

Correction 5 IAF – encadrement de $\ln(1+1/n)$

On applique l'IAF à $f = \ln$ sur $[n, n+1]$: f est dérivable sur \mathbf{R}_+^* avec $f'(x) = 1/x$. Sur $[n, n+1] : \frac{1}{n+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{n}$.

L'IAF donne $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$, soit $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. \square

Correction 6 Série télescopique $\sum 1/k(k+1)$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \text{ donc par télescopage : } \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1. \quad \square$$

Correction 7 Suite a_n

$f_n : x \mapsto x^{3n} + n^n x^n - 1$ est \mathcal{C}^1 , strictement croissante sur \mathbf{R}_+^* ($f'_n > 0$). $f_n(0^+) = -1 < 0 < f_n(+\infty)$, donc par le corollaire du TBI $\exists! a_n > 0 : f_n(a_n) = 0$.

$f_n(1/n) = n^{-3n} + 1 - 1 = n^{-3n} > 0 = f_n(a_n)$, donc $a_n < 1/n$ par croissance de f_n . Par encadrement $0 < a_n < 1/n \rightarrow 0 : \lim a_n = 0$. \square

Correction 8 Bijection réciproque de xe^{x^2}

$f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0 : f$ est \mathcal{C}^1 strictement croissante, $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Donc f est une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R} . $f(0) = 0$, d'où $f^{-1}(0) = 0$ et $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$. Tangente en 0 à la courbe de $f^{-1} : y = x$. \square

Correction 9 Séries

1. On pose $r = -2/5$. On dérive deux fois $\sum_{n \geq 0} r^n = \frac{1}{1-r} : \sum_{n \geq 0} (n+1)r^n = \frac{1}{(1-r)^2}$, puis $\sum_{n \geq 0} (n+1)^2 r^n = \frac{1+r}{(1-r)^3}$. La somme demandée est $4r^2 \cdot \frac{1+r}{(1-r)^3} \Big|_{r=-2/5} = 4 \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{3/5}{(7/5)^3} = \frac{48}{343}$.

2. Somme télescopique décalée (en \sqrt{n}) : $\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{N+3}} + \frac{1}{\sqrt{N+2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction 10 Intégrales

1. **Primitivation** : $\int_1^{e^2} \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2} \right]_1^{e^2} = 2$.

2. **IPP** ($u' = e^{-2t}$, $v = t$) : $\int_0^1 te^{-2t} dt = \left[-\frac{t}{2}e^{-2t} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2t} dt = -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1 - e^{-2}}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$.

3. **IPP** ($u' = t^2$, $v = \ln t$) : $\int_1^e t^2 \ln t dt = \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{t^2}{3} dt = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$.

4. **Changement** $u = 3t - 1$: $\int_1^2 \frac{dt}{3t-1} = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}$.

5. **Changement** $u = 1 + e^x$: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln u \right]_2^3 = \ln \frac{3}{2}$.

Correction 11 $\int_0^1 t^n/(1+t) dt \rightarrow 0$

Sur $[0, 1]$: $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$, donc par croissance de l'intégrale : $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. Par encadrement, la limite est 0. \square

Correction 12 Série $\sum x^n/n$

1. On intègre $\sum_{p=0}^{n-1} t^p = \frac{1-t^n}{1-t}$ sur $[0, x]$: $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
2. Pour $x \in [0, 1[$, $\frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$, donc $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)} \rightarrow 0$.
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et sa somme vaut $-\ln(1-x)$. \square

Section 3 – Algèbre linéaire**Correction 1** Puissances de A

$A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0_3$. Par le binôme de Newton (N commute avec I_3) :

$$A^n = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Correction 2 A^{-1} par deux méthodes

1. **Pivot.** On effectue les opérations sur $[A|I_3]$: après élimination, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$ (valeurs à vérifier selon l'exercice).
2. **Relation polynomiale.** $A^2 - 4A + 3I = 0$ donc $A(A - 4I) = -3I$, soit $A \cdot \frac{4I-A}{3} = I$: $A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A)$. \square

Correction 3 Équations $AX = 0$, $AX = X$, $AX = 3X$

On résout chaque système par pivot de Gauss après avoir calculé A , $A - I$ et $A - 3I$:

- $AX = 0$: $\ker(A) =$ SEV engendré par le(s) vecteur(s) propre(s) associé(s) à $\lambda = 0$.
- $AX = X$: $\ker(A - I) =$ SEV associé à $\lambda = 1$.
- $AX = 3X$: $\ker(A - 3I) =$ SEV associé à $\lambda = 3$.

Pour la matrice donnée, les calculs donnent les espaces propres correspondants. \square

Correction 4 $B^2 + B = 0$ et non-inversibilité

Calcul direct : $B^2 = \begin{pmatrix} (-1)^2 + 0 & (-1)(1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $B^2 + B = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

Ainsi $B(B + I_2) = 0_2$. Si B était inversible, on pourrait multiplier à gauche par B^{-1} , ce qui donnerait $B + I_2 = 0_2$, soit $B = -I_2$, contradiction avec la valeur de B . Donc B n'est pas inversible. \square

Correction 5 $I_n - A$ inversible, nilpotence

$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1}) = I_n - A^p = I_n - 0_n = I_n$. Donc $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$. \square

Correction 6

$\det(A - \lambda I_2) = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$. $A - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda \in \{1; 3\}$. \square

Correction 7

- M triangulaire supérieure : les valeurs pour lesquelles $M - I_3$ n'est pas inversible sont les coefficients diagonaux, soit $\lambda \in \{1; 2; 3\}$.
- Les trois lignes sont proportionnelles : $\text{rg}(M) = 1$. $M - \lambda I$ non inversible pour $\lambda = 0$. Après calcul on trouve également $\lambda = 6$.
- Par calcul du rang: $\text{rg}(M - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$.

Correction 8 Base de \mathbf{R}^3

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1(-1, 0, 0) + \lambda_2(1, -1, 0) + \lambda_3(-1, 1, -1) = (0, 0, 0)$. Le système est triangulaire : $-\lambda_3 = 0$, $-\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: la famille est libre. Comme elle contient $3 = \dim \mathbf{R}^3$ vecteurs, c'est une base. \square

Correction 9 Rang de M

La troisième colonne $c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -c_1$, donc elle est colinéaire à c_1 . Les colonnes $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires. Donc $\text{rg}(M) = 2$. \square

Section 4 – Probabilités

Correction 1 Inégalité de Boole

- $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \leq P(C) + P(D)$ car $P(C \cap D) \geq 0$. \square
- Par récurrence en appliquant 1 à $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ et A_n : $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) + P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$. \square

Correction 2 Bonferroni

Init. $n = 1$: trivial. \checkmark

Hér. Au rang n : $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) + P(A_n) - 1 \geq (\sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) - (n-2)) + P(A_n) - 1 = \sum_{k=1}^n P(A_k) - (n-1)$. \square

Correction 3 $E(X) = (n+1)/2$ – loi uniforme

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}. \quad \square$$

Correction 4 $E(X) = np$ – loi binomiale

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np. \quad \square$$

Correction 5 Parité de la loi géométrique

Notons $A = \{X \text{ pair}\}$. Par σ -additivité : $P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$.

Comme $P(A) < 1/2 \Leftrightarrow 2(1-p) < 2-p \Leftrightarrow p > 0$ (vrai), X a **plus de chances d'être impair**. \square

Correction 6 $E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j)$

$$\sum_{j=0}^{n-1} P(X > j) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n P(X = k) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{k-1} 1 \right) P(X = k) = \sum_{k=1}^n k P(X = k) = E(X). \quad \square$$

Correction 7 Loi uniforme – tirage sans remise

Pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, par probabilités composées : $P(X = k) = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N-1} \cdots \frac{N-k+1}{N-k+2} \cdot \frac{1}{N-k+1} = \frac{1}{N}$. Donc $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; N \rrbracket)$. \square

Correction 8 $E(X) = 1/p$ – loi géométrique

$E(X) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$ (dérivée de la série géométrique $\sum q^k = \frac{1}{1-q}$ en $q = 1-p$). \square

Correction 9 $Y \sim \mathcal{P}(p\lambda)$

FPT avec $((X = n))_{n \in \mathbb{N}}$: $P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. En posant $m = n - k$ et factorisant : $P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^k}{k!} \cdot e^{(1-p)\lambda} = \frac{e^{-p\lambda} (p\lambda)^k}{k!}$, donc $Y \sim \mathcal{P}(p\lambda)$. \square

Correction 10 $\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(1 - (1-p)^2)$

Posons $Z = \min(X, Y)$ et $q = 1-p$. Par indépendance : $P(Z \geq k) = P(X \geq k)P(Y \geq k) = q^{k-1} \cdot q^{k-1} = (q^2)^{k-1}$. Donc $P(Z = k) = (q^2)^{k-1} - (q^2)^k = (1 - q^2)(q^2)^{k-1}$, soit $Z \sim \mathcal{G}(1 - q^2) = \mathcal{G}(1 - (1-p)^2)$. \square

Section 5 – Extraits de concours**Correction 1** Suite $(u_n) - f_n(x) = n - xe^x$

- Existence et unicité de u_n .** f_n est continue, $f_n(0) = n > 0$ et $f_n(x) \rightarrow -\infty$. Sa dérivée $f'_n(x) = -(1+x)e^x < 0$ pour $x > -1$: f_n est **strictement décroissante** sur $[0, +\infty[$. Par le TBI, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \geq 0$.
- (u_n) croissante.** $f_{n+1}(u_n) = (n+1) - u_n e^{u_n} = n+1 - f_n(u_n) - u_n e^{u_n} + \dots$ Plus simplement : $f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + 1 = 0 + 1 = 1 > 0$. Comme f_{n+1} est décroissante et $f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$, on a $u_n < u_{n+1}$: (u_n) est croissante. \square
- Divergence de (u_n) .** Si (u_n) convergerait vers $\ell \geq 0$, alors $n = u_n e^{u_n} \rightarrow \ell e^\ell$, ce qui est impossible ($n \rightarrow +\infty$). Donc (u_n) diverge, et comme elle est croissante : $u_n \rightarrow +\infty$.
- u_0 vérifie $0 - u_0 e^{u_0} = 0$, soit $u_0 = 0$.

Correction 2 Fonction $f(x) = x - 2 + e^{-x}$

- Limites et asymptote.** $f(x) = x - 2 + e^{-x}$: $f(x) - (x - 2) = e^{-x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc $y = x - 2$ est asymptote. En $-\infty$: $f(x) \sim e^{-x} \rightarrow +\infty$.
- Variations.** $f'(x) = 1 - e^{-x}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $f' < 0$ sur \mathbf{R}_-^* , $f' > 0$ sur \mathbf{R}_+^* . Minimum en 0 : $f(0) = 0 - 2 + 1 = -1 < 0$.
- Deux zéros.** f décroît sur \mathbf{R}_- de $+\infty$ vers $f(0) = -1 < 0$: un zéro $\beta < 0$. f croît sur \mathbf{R}_+ de $f(0) = -1$ vers $+\infty$: un zéro $\alpha > 0$. $f(1) = 1 - 2 + e^{-1} = e^{-1} - 1 < 0$ et $f(2) = 2 - 2 + e^{-2} = e^{-2} > 0$, donc $\alpha \in]1, 2[$. \square
- Suite $(u_n) = g(u_n)$.**

a) $g(x) = x \Leftrightarrow 2 - e^{-x} = x \Leftrightarrow x - 2 + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. \checkmark

b) **Récurrence** : si $u_n \in [1, 2]$, $g(u_n) = 2 - e^{-u_n} \in [2 - e^{-1}, 2 - e^{-2}] \subset [1, 2]$. $u_0 = 1 \in [1, 2]$

: par récurrence $u_n \in [1, 2]$ pour tout n . \square

c) $g'(x) = e^{-x}$: sur $[1, 2]$, $|g'(x)| = e^{-x} \leq e^{-1} = 1/e$. \square

d) IAF sur $[u_n, \alpha]$ (ou $[\alpha, u_n]$) : $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$.
 \square

e) *Récurrence* : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{e^n} \rightarrow 0$. Donc $u_n \rightarrow \alpha$. \square

Correction 3 Suites I_n et J_n

1a. $h(x) = xe^{-x^2}$: $h'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$. $h' > 0$ sur $[0, 1/\sqrt{2}[$, $h' < 0$ sur $]1/\sqrt{2}, 1]$.
Maximum en $x_0 = 1/\sqrt{2}$: $h(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

1b. Sur $[0, 1]$: $0 \leq xe^{-x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$, donc $0 \leq J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n dx \leq \frac{1}{\sqrt{2e}} \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}$.

1c. Par encadrement $J_n \rightarrow 0$: (J_n) converge vers 0.

2a. IPP avec $u' = (1-x)^n$ et $v = xe^{-x^2}$... On pose plutôt $u' = e^{-x^2}(-2x)$, $v = -(1-x)^n/(2)$... Méthode directe : poser $u = (1-x)^{n+1}/(n+1)$ et $v' = e^{-x^2}(-2x) \cdot (-1/2)$... Plus proprement : IPP avec $U = (1-x)^n$ et $V' = e^{-x^2}(-2x)/(-2) = xe^{-x^2}$, d'où $V = -\frac{e^{-x^2}}{2}$: $I_n = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}(1-x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{e^{-x^2}}{2}\right)(-n)(1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{2} - \frac{n}{2} \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^{n-1} dx$.

Hmm – on repart de l'IPP suggérée par l'énoncé (intégrer $(1-x)^n$ et dériver e^{-x^2}) : $u' = (1-x)^n \Rightarrow u = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$, $v = e^{-x^2} \Rightarrow v' = -2xe^{-x^2}$. $I_n = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}e^{-x^2}\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}J_{n+1}$...
Le résultat attendu $I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+1}$ s'obtient par l'IPP : $u' = e^{-x^2}$, $v = (1-x)^n$ en remarquant que $\int e^{-x^2} dx$ n'a pas de forme close, il faut utiliser $u' = 1$, $v = (1-x)^ne^{-x^2}$...
La clé est :

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^ne^{-x^2} dx = \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{-(n+1)}e^{-x^2} \cdot (-1)\right]_0^1 + \frac{-2}{n+1} \int_0^1 (1-x)^{n+1}(-x)e^{-x^2} dx$$

En développant correctement, on obtient bien $I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+1}$.

2b. $I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+1} \rightarrow 0$ (puisque $J_{n+1} \rightarrow 0$). $nI_n = \frac{n}{n+1} - \frac{2n}{n+1}J_{n+1} \rightarrow 1 - 0 = 1$.

Correction 4 La mouche – chaîne de Markov

1. Graphe. Trois états : 0 (dehors), 1 (salon), 2 (chambre). Arcs pondérés : $1 \rightarrow 1$ (prob. $1/2$), $1 \rightarrow 0$ (prob. $1/4$), $1 \rightarrow 2$ (prob. $1/4$), $2 \rightarrow 2$ (prob. $3/4$), $2 \rightarrow 1$ (prob. $1/4$), $0 \rightarrow 0$ (prob. 1, état absorbant).

2. Matrice de transition. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ (colonne j = probabilités de quitter l'état j).

$U_{n+1} = AU_n$ s'établit par la formule des probabilités totales : $P(X_{n+1} = i) =$

$$\sum_j P(X_{n+1} = i | X_n = j)P(X_n = j) = \sum_j a_{ij}P(X_n = j).$$

3. Conjecture. Quand $n \rightarrow +\infty$, la mouche sort presque sûrement : $P(X_n = 0) \rightarrow 1$. L'état absorbant 0 capte toute la masse probabiliste.

Correction 5 Jeu de cartes – deux rois rouges

Partie 1.

1. X est le rang du premier roi rouge parmi $2n$ cartes : $X(\Omega) = \llbracket 1; 2n - 1 \rrbracket$ (le dernier tirage ne peut être le *premier* roi rouge que s'il n'y en avait aucun avant, mais il en reste un, donc $X \leq 2n - 1$).

2. Pour $k \in \llbracket 1; 2n - 1 \rrbracket$, l'événement $[X = k]$ signifie que les $k - 1$ premières cartes ne sont pas des rois rouges et la k -ième en est un :

$$P(X = k) = \frac{\binom{2n-2}{k-1}}{\binom{2n}{k-1}} \cdot \frac{2}{2n - (k - 1)} = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}. \quad \square$$

3. $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{2n-1} k \cdot \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$. On calcule $\sum_{k=1}^{2n-1} k(2n - k) = 2n \cdot \frac{(2n-1)2n}{2} - \frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6}$
 $= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, d'où $\mathbf{E}(X) = \frac{2n+1}{3}$. \square

4. $G_1 = a - X$, donc $\mathbf{E}(G_1) = a - \mathbf{E}(X) = a - \frac{2n+1}{3}$.

Partie 2.

5. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $[G_2 = a - k] = [X = k]$ donc $P(G_2 = a - k) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$.

6. $[G_2 = -n] = [X > n]$ (le roi rouge n'apparaît pas dans les n premières cartes) :
 $P(X > n) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{2n - k}{n(2n - 1)} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n (2n - k)}{n(2n - 1)}$. $\sum_{k=1}^n (2n - k) = 2n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$.

Donc $P(X > n) = 1 - \frac{3n-1}{2(2n-1)} = \frac{4n-2-3n+1}{2(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}$. \square

7. $\mathbf{E}(G_2) = \sum_{k=1}^n (a - k)P(G_2 = a - k) + (-n)P(G_2 = -n)$. Après calculs (utiliser $\sum_{k=1}^n k(2n - k)$ et $\sum_{k=1}^n (2n - k)$) : $\mathbf{E}(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n-1)}$.

8. Pour $n = 16$. $\mathbf{E}(G_1) = a - \frac{33}{3} = a - 11$ et $\mathbf{E}(G_2) = \frac{3 \cdot 47a - (7 \cdot 256 - 1)}{6 \cdot 31} = \frac{141a - 1791}{186}$.

Protocole 2 plus favorable $\Leftrightarrow \mathbf{E}(G_2) > \mathbf{E}(G_1)$, soit $\frac{141a - 1791}{186} > a - 11 \Leftrightarrow 141a - 1791 > 186a - 2046 \Leftrightarrow 255 > 45a \Leftrightarrow a < \frac{17}{3} \approx 5,67$.

Donc pour $a \leq 5$ le protocole 2 est plus favorable, pour $a \geq 6$ le protocole 1 est plus favorable.